

Séance 1 : ensembles et applications

Fabien Besnard

5 septembre 2026

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.



$\{\emptyset\} \neq \emptyset !$

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

 $\{\emptyset\} \neq \emptyset$! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. $1 \in A$, $C \subset A$.

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

 $\{\emptyset\} \neq \emptyset$! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. $1 \in A$, $C \subset A$.

Définition

$\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de X .

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

 $\{\emptyset\} \neq \emptyset$! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. $1 \in A$, $C \subset A$.

Définition

$\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de X .

Exemple

Si $X = \{1; 2\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; X\}$.

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

 $\{\emptyset\} \neq \emptyset$! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. $1 \in A$, $C \subset A$.

Définition

$\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de X .

Exemple

Si $X = \{1; 2\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; X\}$.

Exercice

$\mathcal{P}(X)$ avec a) $X = \{1; 2; 3\}$, b) $X = \emptyset$?

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

 $\{\emptyset\} \neq \emptyset$! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. $1 \in A$, $C \subset A$.

Définition

$\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de X .

Exemple

Si $X = \{1; 2\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; X\}$.

Exercice

$\mathcal{P}(X)$ avec a) $X = \{1; 2; 3\}$, b) $X = \emptyset$?

Solution

a) $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; X\}$,

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

 $\{\emptyset\} \neq \emptyset$! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. $1 \in A$, $C \subset A$.

Définition

$\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de X .

Exemple

Si $X = \{1; 2\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; X\}$.

Exercice

$\mathcal{P}(X)$ avec a) $X = \{1; 2; 3\}$, b) $X = \emptyset$?

Solution

a) $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; X\}$,

b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

 $\{\emptyset\} \neq \emptyset$! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. $1 \in A$, $C \subset A$.

Définition

$\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de X .

Exemple

Si $X = \{1; 2\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; X\}$.

Exercice

$\mathcal{P}(X)$ avec a) $X = \{1; 2; 3\}$, b) $X = \emptyset$?

Solution

a) $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; X\}$,

b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Si X a n éléments, $\mathcal{P}(X)$ a

Ensembles : rappels et compléments

Rappel

Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$, $C = \{3; 4\}$, alors :

$A \cap B = C$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $C \subset A$, $A \setminus C = \{1; 2\}$, $C \setminus A = \emptyset$.

 $\{\emptyset\} \neq \emptyset$! Ne pas confondre $\in$ et $\subset$. $1 \in A$, $C \subset A$.

Définition

$\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de X .

Exemple

Si $X = \{1; 2\}$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; X\}$.

Exercice

$\mathcal{P}(X)$ avec a) $X = \{1; 2; 3\}$, b) $X = \emptyset$?

Solution

a) $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; X\}$,

b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Si X a n éléments, $\mathcal{P}(X)$ a 2^n éléments.

Applications entre ensembles

Définition

Soient X, Y des ensembles. Une application $f : X \rightarrow Y$ associe à chaque $x \in X$ une unique image $f(x) \in Y$.

Applications entre ensembles

Définition

Soient X, Y des ensembles. Une application $f : X \rightarrow Y$ associe à chaque $x \in X$ une unique image $f(x) \in Y$.

Exemples

- *Une fonction est une application, avec $X \subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$.*
- *Une suite réelle est une application, avec $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}$.*
 - ▶ *$u(n)$ se note alors u_n .*

Applications entre ensembles

Définition

Soient X, Y des ensembles. Une application $f : X \rightarrow Y$ associe à chaque $x \in X$ une unique image $f(x) \in Y$.

Exemples

- Une fonction est une application, avec $X \subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$.
- Une suite réelle est une application, avec $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}$.
 - ▶ $u(n)$ se note alors u_n .

Exemple



$\text{alt} : \text{Carte} \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \mapsto \text{altitude de } M$

Applications entre ensembles

Définition

Soient X, Y des ensembles. Une application $f : X \rightarrow Y$ associe à chaque $x \in X$ une unique image $f(x) \in Y$.

Exemples

- Une fonction est une application, avec $X \subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$.
- Une suite réelle est une application, avec $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}$.
 - ▶ $u(n)$ se note alors u_n .

Exemple



$\text{alt} : \text{Carte} \longrightarrow \mathbb{R}$

$M \mapsto \text{altitude de } M$

- Tout point a une altitude unique (image).
- 1107 a un seul antécédent.
- $\{ \text{antécédents de } 1000 \} = \text{ligne de niveau}$.

Injectivité

Définition

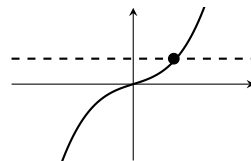
*Une application $f : X \rightarrow Y$ est **injective** ssi les images des éléments de X sont toutes distinctes.*

Injectivité

Définition

Une application $f : X \rightarrow Y$ est **injective** ssi les images des éléments de X sont toutes distinctes.

Formellement : $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.



Injectif

Injectivité

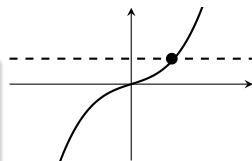
Définition

Une application $f : X \rightarrow Y$ est **injective** ssi les images des éléments de X sont toutes distinctes.

Formellement : $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Exemples

- $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto 2n$.
 - ▶ $d(n) = d(n') \Rightarrow 2n = 2n' \Rightarrow n = n'$.
- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
 - ▶ Plus généralement toute fonction ou suite strictement monotone.



Injectif

Injectivité

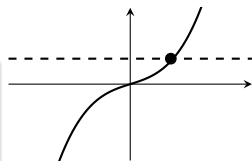
Définition

Une application $f : X \rightarrow Y$ est **injective** ssi les images des éléments de X sont toutes distinctes.

Formellement : $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Exemples

- $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto 2n$.
 - ▶ $d(n) = d(n') \Rightarrow 2n = 2n' \Rightarrow n = n'$.
- $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
 - ▶ Plus généralement toute fonction ou suite strictement monotone.



Injectif

Contre-exemple

Injectivité

Définition

Une application $f : X \rightarrow Y$ est **injective** ssi les images des éléments de X sont toutes distinctes.

Formellement : $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

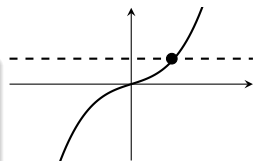
Exemples

- $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n$.
 - ▶ $d(n) = d(n') \Rightarrow 2n = 2n' \Rightarrow n = n'$.
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - ▶ Plus généralement toute fonction ou suite strictement monotone.

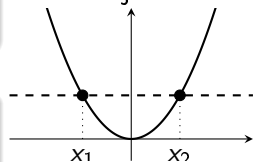
Contre-exemple

$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, puisque $c(-1) = c(1)$.

Autre contre-ex : l'application alt.



Injectif



non-injectif

Injectivité

Définition

Une application $f : X \rightarrow Y$ est **injective** ssi les images des éléments de X sont toutes distinctes.

Formellement : $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

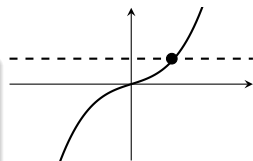
Exemples

- $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n$.
 - ▶ $d(n) = d(n') \Rightarrow 2n = 2n' \Rightarrow n = n'$.
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - ▶ Plus généralement toute fonction ou suite strictement monotone.

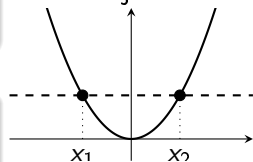
Contre-exemple

$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, puisque $c(-1) = c(1)$.

Autre contre-ex : l'application alt.



Injectif



non-injectif

Exercices

Exercice

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^5 + x^3 + 1$ est-elle injective ?

Exercices

Exercice

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^5 + x^3 + 1$ est-elle injective ?

Oui, car elle est strictement croissante :

Exercices

Exercice

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^5 + x^3 + 1$ est-elle injective ?

Oui, car elle est strictement croissante :

① par étude des variations :

▶ $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 > 0$ sauf en 0.

Exercices

Exercice

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^5 + x^3 + 1$ est-elle injective ?

Oui, car elle est strictement croissante :

- ❶ par étude des variations :
 - ▶ $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 > 0$ sauf en 0.
- ❷ ou en tant que somme de 2 fonctions strictement croissantes.

Exercices

Exercice

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^5 + x^3 + 1$ est-elle injective ?

Oui, car elle est strictement croissante :

- ① par étude des variations :
 - ▶ $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 > 0$ sauf en 0.
- ② ou en tant que somme de 2 fonctions strictement croissantes.

Exercice (*)

Montrer que l'application $g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (a, b) \longmapsto 2^a \times 3^b$ est injective.

Exercices

Exercice

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^5 + x^3 + 1$ est-elle injective ?

Oui, car elle est strictement croissante :

① par étude des variations :

▶ $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 > 0$ sauf en 0.

② ou en tant que somme de 2 fonctions strictement croissantes.

Exercice (*)

Montrer que l'application $g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}, (a, b) \longmapsto 2^a \times 3^b$ est injective.

Soient $x_1 = (a_1, b_1)$ et $x_2 = (a_2, b_2)$. Montrons que $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Exercices

Exercice

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^5 + x^3 + 1$ est-elle injective ?

Oui, car elle est strictement croissante :

① par étude des variations :

▶ $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 > 0$ sauf en 0.

② ou en tant que somme de 2 fonctions strictement croissantes.

Exercice (*)

Montrer que l'application $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \mapsto 2^a \times 3^b$ est injective.

Soient $x_1 = (a_1, b_1)$ et $x_2 = (a_2, b_2)$. Montrons que $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 2^{a_1} 3^{b_1} = 2^{a_2} 3^{b_2}$$

Exercices

Exercice

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^5 + x^3 + 1$ est-elle injective ?

Oui, car elle est strictement croissante :

① par étude des variations :

▶ $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 > 0$ sauf en 0.

② ou en tant que somme de 2 fonctions strictement croissantes.

Exercice (*)

Montrer que l'application $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \mapsto 2^a \times 3^b$ est injective.

Soient $x_1 = (a_1, b_1)$ et $x_2 = (a_2, b_2)$. Montrons que $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow 2^{a_1} 3^{b_1} = 2^{a_2} 3^{b_2} \Rightarrow a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2$$

par unicité de la décomposition primaire d'un entier.

Exercice de création

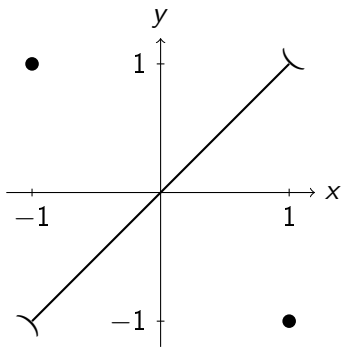
Exercice

Déterminer une fonction $f : [-1; 1] \longrightarrow [-1; 1]$, injective et non monotone.

Exercice de création

Exercice

Déterminer une fonction $f : [-1; 1] \longrightarrow [-1; 1]$, injective et non monotone.

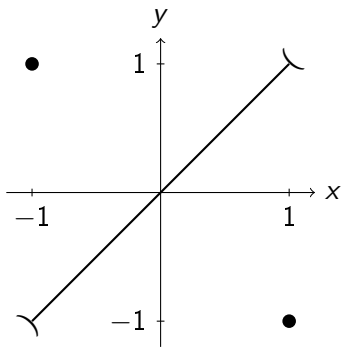


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = -1, \\ x & \text{si } -1 < x < 1, \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exercice de création

Exercice

Déterminer une fonction $f : [-1; 1] \longrightarrow [-1; 1]$, injective et non monotone.



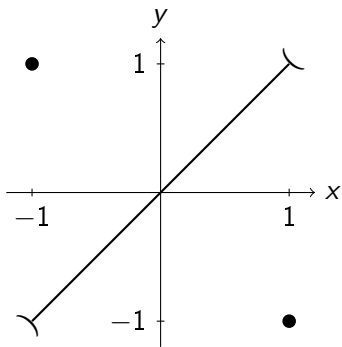
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = -1, \\ x & \text{si } -1 < x < 1, \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Si $y = 1$: un seul antécédent (-1) .

Exercice de création

Exercice

Déterminer une fonction $f : [-1; 1] \longrightarrow [-1; 1]$, injective et non monotone.



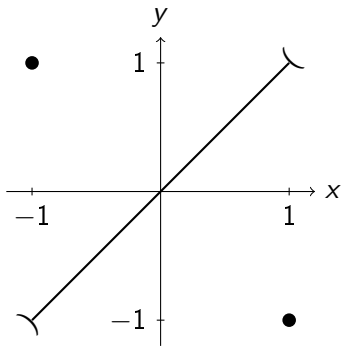
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = -1, \\ x & \text{si } -1 < x < 1, \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Si $y = 1$: un seul antécédent (-1) .
- Si $-1 < y < 1$: un seul antécédent (y) .

Exercice de création

Exercice

Déterminer une fonction $f : [-1; 1] \longrightarrow [-1; 1]$, injective et non monotone.



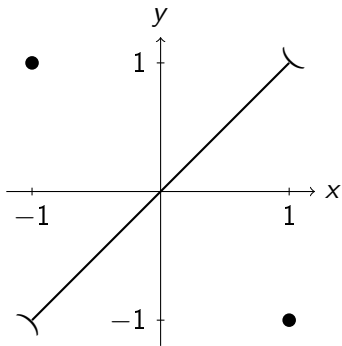
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = -1, \\ x & \text{si } -1 < x < 1, \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Si $y = 1$: un seul antécédent (-1) .
- Si $-1 < y < 1$: un seul antécédent (y) .
- Si $y = -1$: un seul antécédent (1) .

Exercice de création

Exercice

Déterminer une fonction $f : [-1; 1] \longrightarrow [-1; 1]$, injective et non monotone.



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = -1, \\ x & \text{si } -1 < x < 1, \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- Si $y = 1$: un seul antécédent (-1) .
- Si $-1 < y < 1$: un seul antécédent (y) .
- Si $y = -1$: un seul antécédent (1) .

$\Rightarrow f$ injective.

Surjectivité et bijectivité

Définition

*Une application $f : X \rightarrow Y$ est **surjective** ssi tout élément de Y possède un antécédent par f . Une application à la fois injective et surjective est dite **bijjective**.*

Surjectivité et bijectivité

Définition

*Une application $f : X \rightarrow Y$ est **surjective** ssi tout élément de Y possède un antécédent par f . Une application à la fois injective et surjective est dite **bijection**.*

Formellement :

- f surj ssi $\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$.

Surjectivité et bijectivité

Définition

Une application $f : X \rightarrow Y$ est **surjective** ssi tout élément de Y possède un antécédent par f . Une application à la fois injective et surjective est dite **bijection**.

Formellement :

- f surj ssi $\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$.
- f bij ssi $\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x)$.

Surjectivité et bijectivité

Définition

Une application $f : X \rightarrow Y$ est **surjective** ssi tout élément de Y possède un antécédent par f . Une application à la fois injective et surjective est dite **bijjective**.

Formellement :

- f surj ssi $\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$.
- f bij ssi $\forall y \in Y, \exists! x \in X, y = f(x)$.

Exemples

- $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective ($\forall y \in \mathbb{R}_+, y^2$ est l'unique antécédent de y).
- $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ est surjective mais pas injective.

Surjectivité et bijectivité

Définition

Une application $f : X \rightarrow Y$ est **surjective** ssi tout élément de Y possède un antécédent par f . Une application à la fois injective et surjective est dite **bijjective**.

Formellement :

- f surj ssi $\forall y \in Y, \exists x \in X, y = f(x)$.
- f bij ssi $\forall y \in Y, \exists ! x \in X, y = f(x)$.

Exemples

- $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective ($\forall y \in \mathbb{R}_+, y^2$ est l'unique antécédent de y).
- $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ est surjective mais pas injective.
- Montrer qu'une application est surjective peut être difficile.
- Montrer qu'une application est injective est généralement facile.

Surjectivité et bijectivité : exercice

Exercice

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[$, définie par $x \longmapsto x^2 + 3x + 2$, est surjective. Est-elle bijective ?

Surjectivité et bijectivité : exercice

Exercice

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[$, définie par $x \longmapsto x^2 + 3x + 2$, est surjective. Est-elle bijective ?

Soit $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 3x + 2 = y \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - y = 0$ (E).

Surjectivité et bijectivité : exercice

Exercice

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[$, définie par $x \longmapsto x^2 + 3x + 2$, est surjective. Est-elle bijective ?

Soit $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 3x + 2 = y \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - y = 0$ (E).

$$\Delta(y) = 9 - 4(2 - y) = 1 + 4y.$$

Surjectivité et bijectivité : exercice

Exercice

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[$, définie par $x \longmapsto x^2 + 3x + 2$, est surjective. Est-elle bijective ?

Soit $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 3x + 2 = y \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - y = 0$ (E).

$\Delta(y) = 9 - 4(2 - y) = 1 + 4y$. Pour tout $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$, $\Delta(y) \geq 0$, donc (E) possède au moins une solution, et y possède au moins un antécédent par f .

Surjectivité et bijectivité : exercice

Exercice

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[$, définie par $x \longmapsto x^2 + 3x + 2$, est surjective. Est-elle bijective ?

Soit $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 3x + 2 = y \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - y = 0$ (E).
 $\Delta(y) = 9 - 4(2 - y) = 1 + 4y$. Pour tout $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$, $\Delta(y) \geq 0$, donc (E) possède au moins une solution, et y possède au moins un antécédent par f . L'application f est surjective.

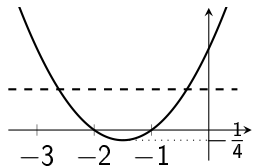
Surjectivité et bijectivité : exercice

Exercice

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[$, définie par $x \longmapsto x^2 + 3x + 2$, est surjective. Est-elle bijective ?

Soit $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 3x + 2 = y \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - y = 0$ (E).

$\Delta(y) = 9 - 4(2 - y) = 1 + 4y$. Pour tout $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$, $\Delta(y) \geq 0$, donc (E) possède au moins une solution, et y possède au moins un antécédent par f . L'application f est surjective.



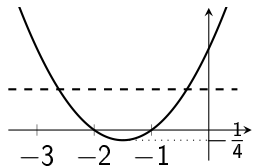
Surjectivité et bijectivité : exercice

Exercice

Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{1}{4}; +\infty[$, définie par $x \longmapsto x^2 + 3x + 2$, est surjective. Est-elle bijective ?

Soit $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + 3x + 2 = y \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 - y = 0$ (E).

$\Delta(y) = 9 - 4(2 - y) = 1 + 4y$. Pour tout $y \in [-\frac{1}{4}; +\infty[$, $\Delta(y) \geq 0$, donc (E) possède au moins une solution, et y possède au moins un antécédent par f . L'application f est surjective.



Pour $y > -\frac{1}{4}$, $\Delta(y) > 0 \Rightarrow$ (E) a deux solutions.
Donc f n'est pas injective.

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Idée : $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $-1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, etc.

Formule ?

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Idée : $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$, etc.

Formule ?
$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{si } n > 0 \\ -2n, & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Idée : $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$, etc.

$$\text{Formule ? } f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{si } n > 0 \\ -2n, & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Montrons que tout $y \in \mathbb{N}$ possède un unique antécédent.

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Idée : $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$, etc.

$$\text{Formule ? } f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{si } n > 0 \\ -2n, & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Montrons que tout $y \in \mathbb{N}$ possède un unique antécédent.

On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f(n)$.

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

Idée : $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$, etc.

$$\text{Formule ? } f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{si } n > 0 \\ -2n, & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Montrons que tout $y \in \mathbb{N}$ possède un unique antécédent.

On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f(n)$.

On remarque que $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n)$ est impair, et $n \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow f(n)$ est pair.

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

Idée : $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$, etc.

$$\text{Formule ? } f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{si } n > 0 \\ -2n, & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Montrons que tout $y \in \mathbb{N}$ possède un unique antécédent.

On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f(n)$.

On remarque que $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n)$ est impair, et $n \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow f(n)$ est pair.

- Si y est pair, n doit être ≤ 0 . Or $-2n = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{Z}_-$, qui est $n = -\frac{y}{2}$.

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

Idée : $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$, etc.

$$\text{Formule ? } f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{si } n > 0 \\ -2n, & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Montrons que tout $y \in \mathbb{N}$ possède un unique antécédent.

On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f(n)$.

On remarque que $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n)$ est impair, et $n \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow f(n)$ est pair.

- Si y est pair, n doit être ≤ 0 . Or $-2n = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{Z}_-$, qui est $n = -\frac{y}{2}$.
- Si y est impair, n doit être > 0 . Or $2n - 1 = y$ possède une unique solution $n = \frac{y+1}{2}$ dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice de création

Exercice

Déterminer une application bijective $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

Idée : $0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$, etc.

$$\text{Formule ? } f(n) = \begin{cases} 2n - 1, & \text{si } n > 0 \\ -2n, & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Montrons que tout $y \in \mathbb{N}$ possède un unique antécédent.

On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $y = f(n)$.

On remarque que $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n)$ est impair, et $n \in \mathbb{Z}_- \Rightarrow f(n)$ est pair.

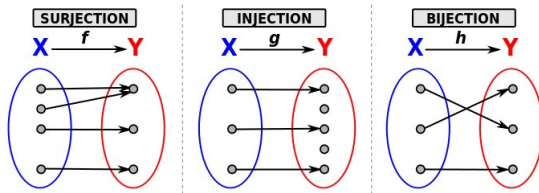
- Si y est pair, n doit être ≤ 0 . Or $-2n = y$ possède une unique solution dans $\mathbb{Z}_-$, qui est $n = -\frac{y}{2}$.
- Si y est impair, n doit être > 0 . Or $2n - 1 = y$ possède une unique solution $n = \frac{y+1}{2}$ dans $\mathbb{N}^*$.

Donc f est bien bijective.

Injections, surjection, bijection et cardinal

Définition

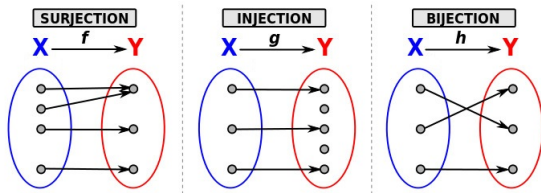
Si X a un nombre fini d'éléments, ce nombre s'appelle **cardinal** de X et se note $|X|$.



Injections, surjection, bijection et cardinal

Définition

Si X a un nombre fini d'éléments, ce nombre s'appelle **cardinal** de X et se note $|X|$.

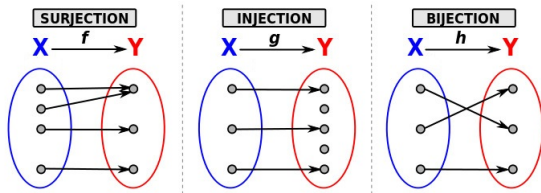


- 1 S'il existe une injection de X dans Y , alors $|X| \leq |Y|$.
 - 2 S'il existe une surjection de X dans Y , alors $|X| \geq |Y|$.
 - 3 S'il existe une bijection de X dans Y , alors $|X| = |Y|$.
- En un certain sens, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même nombre d'éléments.

Injections, surjection, bijection et cardinal

Définition

Si X a un nombre fini d'éléments, ce nombre s'appelle **cardinal** de X et se note $|X|$.

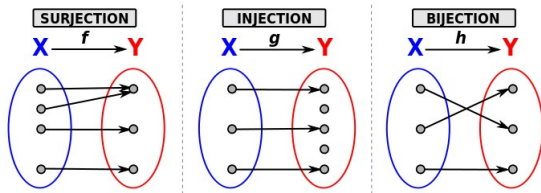


- 1 S'il existe une injection de X dans Y , alors $|X| \leq |Y|$.
 - 2 S'il existe une surjection de X dans Y , alors $|X| \geq |Y|$.
 - 3 S'il existe une bijection de X dans Y , alors $|X| = |Y|$.
- En un certain sens, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même nombre d'éléments.
 - $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ ont le même nombre d'éléments,

Injections, surjection, bijection et cardinal

Définition

Si X a un nombre fini d'éléments, ce nombre s'appelle **cardinal** de X et se note $|X|$.



- 1 S'il existe une injection de X dans Y , alors $|X| \leq |Y|$.
 - 2 S'il existe une surjection de X dans Y , alors $|X| \geq |Y|$.
 - 3 S'il existe une bijection de X dans Y , alors $|X| = |Y|$.
- En un certain sens, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ont le même nombre d'éléments.
 - $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ ont le même nombre d'éléments, mais pas $\mathbb{R}$! (Cantor).

Pour la prochaine fois

Exercice

- 1 $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 - \frac{1}{2}x + 1$. *Est-elle injective ? Surjective ?*
- 2 *La suite réelle définie par $u_n = n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est-elle une application injective ?*

Pour la prochaine fois

Exercice

- 1 $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 - \frac{1}{2}x + 1$. Est-elle injective ? Surjective ?
- 2 La suite réelle définie par $u_n = n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est-elle une application injective ?

Exercice

Montrer qu'une fonction polynôme de degré 2 (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) n'est jamais surjective.

Pour la prochaine fois

Exercice

- 1 $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 - \frac{1}{2}x + 1$. Est-elle injective ? Surjective ?
- 2 La suite réelle définie par $u_n = n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est-elle une application injective ?

Exercice

Montrer qu'une fonction polynôme de degré 2 (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) n'est jamais surjective.

Exercice (*)

Montrer que l'application $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}, n \longmapsto n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ est injective.